

Интегрирование с помощью формул Гаусса

Интегрирование с помощью формул Гаусса — это метод численного интегрирования, который позволяет приближённо вычислять определённые интегралы с высокой точностью при использовании относительно небольшого числа узлов. Основная идея метода заключается в замене подынтегральной функции многочленом и вычислении интеграла от этого многочлена.

Суть метода

Метод Гаусса основан на использовании специальных квадратурных формул, которые приближают интеграл суммой произведений значений функции в определённых узлах и соответствующих весов. При этом выбор узлов интегрирования осуществляется не заранее, а определяется методом вывода формул.

Основанием метода является теорема о том, что для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует многочлен $P_n(x)$ степени не выше n , который совпадает со значениями функции $f(x)$ в $n+1$ точке этого отрезка. Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Подставляя этот многочлен в интеграл и вычисляя, получаем квадратурную формулу Гаусса:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \cdot f(x_k),$$

где A_k — коэффициенты квадратурной формулы, зависящие от выбора узлов интерполяции, x_k — узлы Гаусса, n — число узлов.

Преобразование интервала интегрирования

Для вычисления интеграла на произвольном отрезке $[a, b]$ делается линейное преобразование независимой переменной. Например, можно использовать замену:

$$x = (b + a)/2 + (b - a)/2 t,$$

где $t \in [-1, 1]$. После этого применяется квадратурная формула Гаусса на стандартном интервале $[-1, 1]$.

Узлы и веса

Наиболее распространённой является квадратура Гаусса-Лежандра, которая основана на использовании корней полиномов Лежандра — ортогональных функций на интервале $[-1, 1]$.

Основные узлы и веса для квадратуры Гаусса-Лежандра различных порядков можно найти в справочных материалах. Например:

- для первого порядка используется один узел (0) и соответствующий вес (2);
- для второго порядка узлы располагаются на $-1/\sqrt{3}$ и $1/\sqrt{3}$ с весами, равными 1.

Особенности метода

- Высокая скорость сходимости. Для получения заданной точности требуется меньшее число узлов по сравнению с некоторыми другими методами (например, методом прямоугольников).
- Максимальная алгебраическая точность для данного числа узлов. Например, для двух узлов можно получить метод 3-го порядка точности.
- Возможность обобщения на многомерный случай.

Оценка погрешности

Для оценки ошибки интегрирования по формулам Гаусса можно использовать формулу:

$$\Delta_n = ((b - a)^{(2n+1)} (n!)^4) / ((2n + 1) ((2n)!)^3 f^{(2n)}(\xi)),$$

где $\xi \in [a, b]$.

Применение

Формулы Гаусса используются в различных областях, включая физику (например, при моделировании полей), инженерные расчёты (для нахождения масс, моментов инерции и нагрузок). Также они могут применяться для вычисления площадей под графиком функции, площадей фигур, ограниченных двумя графиками, и пространственных площадей поверхностей.

Недостаток метода — отсутствие простого с вычислительной точки зрения способа оценки погрешности полученного значения интеграла. Для повышения точности иногда применяют модификации, например, формулы Гаусса–Кронрода.